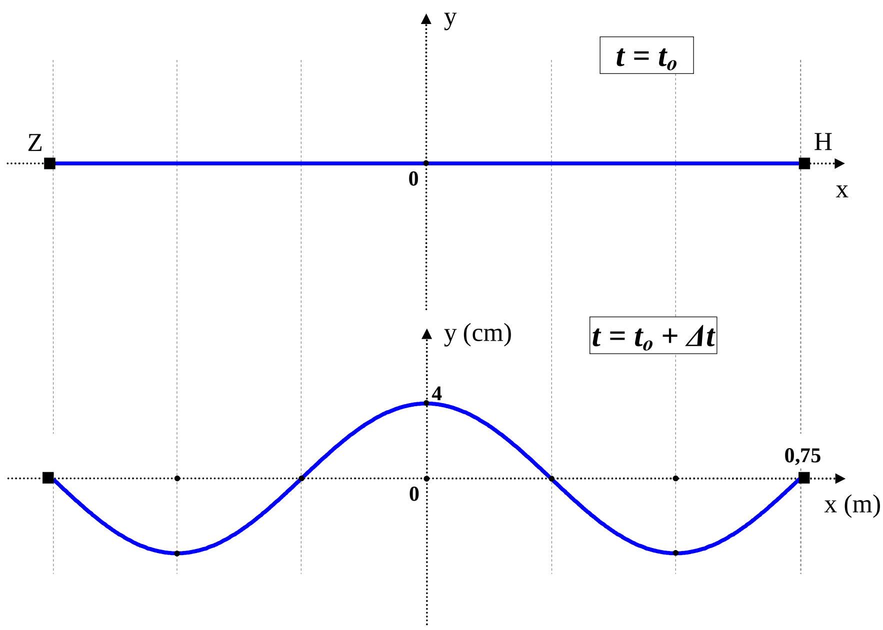
Κινητική ενέργεια χορδής όπου υπάρχει στάσιμο κύμα



Στο πιο πάνω σχήμα απεικονίζεται τεντωμένη μεταλλική χορδή μήκους **(ΖΗ) = L** και μάζας **M = 0,2 kg** με τα δύο της άκρα στερεωμένα ακλόνητα. Πάνω της έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα και φαίνονται δύο στιγμιότυπά του τη στιγμή t_o και τη στιγμή $t_o + \Delta t$ όπου μηδενίστηκε η κινητική ενέργεια της χορδής για πρώτη φορά μετά τη στιγμή t_o. Αν είναι $\Delta t = 0{,}01$ s τότε:

1) Να γράψετε την εξίσωση του στασίμου κύματος πάνω στη χορδή.

2) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της χορδής τη στιγμή t_o.

(Δίνεται $\pi^2 \approx 10$)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1) Γνωρίζουμε ότι όλα τα σημεία στο στάσιμο κύμα περνούν ταυτόχρονα από τις θέσεις ισορροπίας τους (1^o στιγμιότυπο, για $t = t_o$) και φτάνουν ταυτόχρονα στις ακραίες θέσεις, όπου μηδενίζονται οι ταχύτητές τους (άρα και η κινητική ενέργεια της χορδής, 2^o στιγμιότυπο, για $t = t_o + \Delta t$). Επειδή αυτό συμβαίνει για πρώτη φορά μετά τη στιγμή t_o, άρα ισχύει:

$$\Delta t = T/4 \quad \rightarrow \quad \boxed{T = 0{,}04\ s} \quad \text{και} \quad \boxed{\omega = 2\pi/T = 50\pi\ rad/s} \quad (1)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι το σημείο της χορδής που βρίσκεται στη θέση **x = 0** είναι κοιλία και τη στιγμή t_o κινείται με φορά προς τα επάνω (αφού μετά από **T/4** φτάνει την πάνω ακραία θέση). Η ταλάντωσή του περιγράφεται επομένως από την εξίσωση:

$$\boxed{y_{(x=0)} = 2A\cdot ημ[ω(t–t_o)]} \quad (2)$$

όπου **A** το πλάτος των τρεχόντων κυμάτων από τη συμβολή των οποίων προέκυψε αυτό το στάσιμο.

Το εν λόγω στάσιμο έχει τρεις ατράκτους μήκους **λ/2** (ισχύει δηλαδή **L = 3λ/2**) και περιγράφεται επομένως από την εξίσωση:

$$\boxed{y = 2A\cdot συν(2πx/λ)\cdot ημ[ω(t–t_o)]} \quad με \quad \boxed{–3λ/4 \le x \le +3λ/4} \quad (3)$$

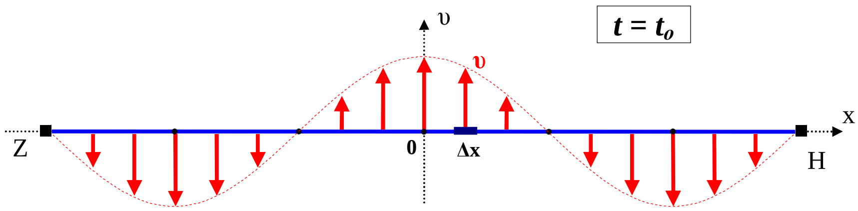
Από το εικονιζόμενο 2^o στιγμιότυπο προκύπτουν εύκολα τα εξής:

$$\left.\begin{array}{l} L = 3λ/2 = 1{,}5m \rightarrow \boxed{λ = 1\ m} \ \text{και} \ \boxed{L = 1{,}5\ m} \\ 2A = 4\ cm \rightarrow \boxed{A = 0{,}02\ m} \end{array}\right| \quad (4)$$

και τελικά η ζητούμενη εξίσωση του στασίμου είναι:

$$\boxed{y = 0{,}04\cdot συν(2πx)\cdot ημ[50π(t–t_o)] \quad (S.I.)} \quad με \quad \boxed{– 0{,}75m \le x \le +0{,}75m} \quad (5)$$

2) Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η κατανομή των ταχυτήτων των σημείων της χορδής τη στιγμή **t$_o$**, οι οποίες μάλιστα τη στιγμή αυτή έχουν τις μέγιστες τιμές τους.



Γενικότερα, η ταχύτητα οποιουδήποτε σημείου της χορδής, όπως προκύπτει από την (3), δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{υ = 2A\cdot ω\cdot συν(2πx/λ)\cdot συν[ω(t–t_o)]} \quad με \quad \boxed{–3λ/4 \le x \le +3λ/4} \quad (6)$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε ότι η χορδή αποτελείται από μικρά τμήματα με μήκη $Δx_1$, $Δx_2$, ... και μάζες m_1, m_2, ... τότε, οποιαδήποτε στιγμή **t**, καθένα από αυτά έχει κινητική ενέργεια K_1, K_2, ... που δίνεται από τη σχέση:

$$K_i = ½\cdot m_i\cdot υ_i^2 = ½\cdot m_i\cdot 4A^2\cdot ω^2\cdot συν^2 (2πx/λ)\cdot συν^2[ω(t–t_o)] =$$

$$= 2\cdot m_i\cdot A^2\cdot ω^2\cdot συν^2 (2πx/λ)\cdot συν^2[ω(t–t_o)] =$$

$$= 2\cdot (M/L)\cdot Δx_i\cdot A^2\cdot ω^2\cdot συν^2 (2πx/λ)\cdot συν^2[ω(t–t_o)]$$

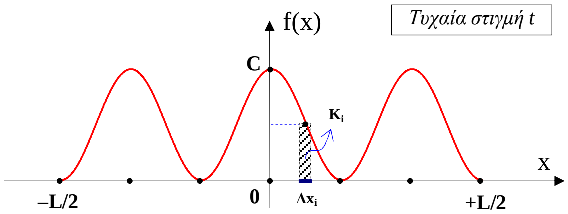
ή αν θέσουμε για ευκολία:

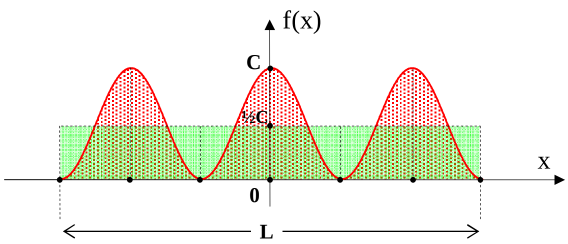
$$\boxed{C = 2\cdot(M/L)\cdot A^2\cdot\omega^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2[\omega(t-t_o)]} \quad (7)$$

προκύπτει τελικά:

$$\boxed{K_i = C\cdot\sigma\upsilon\nu^2(2\pi x/\lambda)\cdot\Delta x_i} \quad (8)$$

Αν απεικονίσουμε γραφικά τη συνάρτηση $\mathbf{f(x) = C\cdot\sigma\upsilon\nu^2(2\pi x/\lambda)}$ τότε η κινητική ενέργεια $\mathbf{K_i}$ του κάθε τμήματος $\mathbf{\Delta x_i}$ της χορδής είναι αριθμητικά ίση με το γραμμοσκιασμένο εμβαδό της στήλης με βάση $\mathbf{\Delta x_i}$ (βλέπε επόμενο σχήμα).





Η συνολική κινητική ενέργεια **K** της χορδής είναι επομένως ίση αριθμητικά με το εμβαδό που περικλείει η συνάρτηση **f(x)** (κόκκινο) που μπορούμε να το υπολογίσουμε εύκολα τετραγωνίζοντάς το (πράσινο):

$$K = \sum K_i = \tfrac{1}{2}\cdot C\cdot L$$

και με αντικατάσταση του **C** από την (7):

$$K = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(M/L)\cdot A^2\cdot\omega^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2[\omega(t-t_o)]\cdot L \;\rightarrow\; \boxed{K = M\cdot A^2\cdot\omega^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2[\omega(t-t_o)]} \quad (9)$$

(Παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια της χορδής εξαιτίας του στασίμου που έχει δημιουργηθεί δεν εξαρτάται από το πλήθος των ατράκτων του.)

Τέλος, θέτοντας $\mathbf{t = t_o}$ βρίσκουμε τη ζητούμενη κινητική ενέργεια, που είναι και η μέγιστη, αφού όλα τα σημεία διέρχονται τότε από τις θέσεις ισορροπίας τους:

$$\boxed{K_{max} = M\cdot A^2\cdot\omega^2 = 2\ J} \quad (10)$$

Διονύσης Μητρόπουλος